§ 6. АСТАТИЧЕСКИЙ ГИРОСКОП

Гироскопом обычно называют симметричное твердое тело, совершающее движение вокруг неподвижной точки O, расположенной на оси симметрии Oz (рис. 138). Эллипсоид инерции гироскопа относительно его неподвижной точки является эллипсоидом вращения (на рисунке он изображен штриховой линией), а любая его ось в экваториальной плоскости, перпендикулярной оси гироскопа (например, Ox и Oy),— главной осью инерции. Все эти оси имеют одинаковые моменты инерции. Ось гироскопа Oz является главной центральной осью инерции.

Крепление оси гироскопа в одной точке обычно осуществляется с помощью рамок той или иной формы (рис. 139). Волчок, у которого точка O движется по плоскости, совершает более сложное движение, чем гироскоп, имеющий одну закрепленную точку на оси.

Астатическим (или *уравновешенным*) гироскопом называют гироскоп с неподвижной точкой в центре масс, если на него

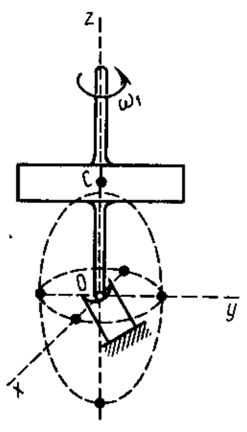

Рис. 138

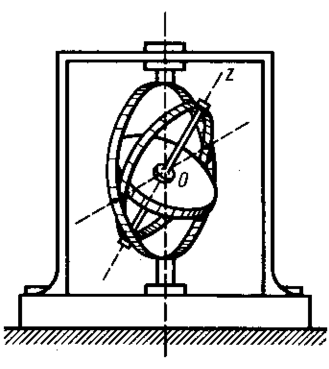

Рис. 139

действуют только сила тяжести и реакция неподвижной точки. В астатическом гироскопе имеем соединение двух случаев интегрируемости — Эйлера и Лагранжа.

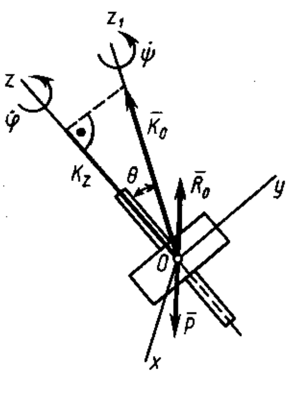

Рис. 140

Если Oz — ось симметрии гироскопа, то для осей координат $Oxyz$, скрепленных с гироскопом, $J_x = J_y$. Для астатического гироскопа главный момент внешних сил относительно закрепленной точки

$$\bar{L}_O^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}) = 0,$$

так как силы тяжести и реакция закрепленной точки проходят через эту точку O, если нет сил трения в закрепленной точке (рис. 140).

Из теоремы об изменении кинетического момента для абсолютного движения гироскопа относительно неподвижных осей координат

$$\mathrm{d}\bar{K}_O / \mathrm{d}t = \bar{L}_O^{(e)} = 0$$

следует, что кинетический момент относительно неподвижной точки гироскопа $\bar{K}_O = \overrightarrow{\mathrm{const}}$. В частности, постоянной величиной является модуль кинетического момента K_O.

Если одну из неподвижных осей координат Oz_1 направить по вектору кинетического момента $\bar{K}_O$, имеющему неизменное направление в пространстве осей координат $Ox_1y_1z_1$, то проекция $\bar{K}_O$ на ось Oz, как главная ось инерции для точки O и одновременно ось собственного вращения гироскопа, выразится в форме

$$K_z = K_O \cos\theta,$$

где θ — угол между осью Oz_1 и осью собственного вращения Oz. Он обозначен так же, как и угол нутации. В дальнейшем окажется, что он им и является.

С другой стороны, так как ось Oz является главной осью инерции гироскопа для неподвижной точки O, то $K_z = J_z\omega_z$.

Следовательно,

$$J_z\omega_z = K_O \cos\theta \quad \text{и} \quad \cos\theta = J_z\omega_z / K_O. \tag{20}$$

Определим движение уравновешенного гироскопа, т. е. установим зависимость углов Эйлера ψ, θ, φ от времени при заданных начальных условиях. Так как $\bar{L}_O^{(e)} = 0$, то $L_x^{(e)} = L_y^{(e)} = L_z^{(e)} = 0$. Учитывая это и условие симметричности $J_x = J_y$, получим следующие динамические уравнения Эйлера:

$$\left.\begin{aligned} &J_x \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} + (J_z - J_x)\,\omega_z\omega_y = 0; \\ &J_y \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} + (J_x - J_z)\,\omega_x\omega_z = 0; \\ &J_z \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

К ним следует присоединить кинематические уравнения Эйлера

$$\left.\begin{aligned} &\omega_x = \psi \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi; \\ &\omega_y = \psi \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi; \\ &\omega_z = \psi \cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Вместо системы уравнений (21) удобнее использовать первые интегралы этой системы, один из которых получается умножением (21) соответственно на ω_x, ω_y, ω_z и суммированием. После преобразований получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_x \frac{(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{2} + J_z \frac{\omega_z^2}{2}\right] = 0;$$

$$J_x(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_z\omega_z^2 = \mathrm{const} = 2h. \tag{23}$$

Это соотношение [первый интеграл системы (21)], в котором постоянная обозначена $2h$, выражает закон сохранения механической энергии $T + \Pi = h$, где Π — потенциальная энергия — постоянная, принятая равной нулю.

Если уравнения системы (21) соответственно умножить на $J_x\omega_x$, $J_y\omega_y$, $J_z\omega_z$ и сложить, то после интегрирования получается другой первый интеграл:

$$J_x^2(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_z^2\omega_z^2 = \mathrm{const} = K_O^2. \tag{24}$$

Соотношение (24) является законом сохранения кинетического момента относительно закрепленной точки.

Из третьего уравнения системы (21) следует еще один первый интеграл:

$$\omega_z = \mathrm{const} = \omega_z^{(0)}, \tag{25}$$

где $\omega_z^{(0)}$ — значение ω_z при $t = 0$.

Первые интегралы (23)—(25) системы уравнений (21) можно использовать вместо самой системы уравнений. Заменяя ω_z на $\omega_z^{(0)}$ и учитывая, что $K_O = \mathrm{const}$, из (20) получаем, что угол нутации — постоянная величина. Действительно,

$$\cos\theta = J_z\omega_z^{(0)} / K_O = \mathrm{const} = \cos\theta_0,$$

где θ_0 — значение θ при $t = 0$. Так как $\theta = \mathrm{const}$, то угловая скорость нутации $\dot{\theta} = 0$. С учетом этого система уравнений (22) примет вид

$$\omega_x = \psi \sin\theta_0 \sin\varphi; \quad \omega_y = \psi \sin\theta_0 \cos\varphi; \quad \omega_z^{(0)} = \psi \cos\theta_0 + \dot{\varphi}. \tag{22$'$}$$

Возведем первые два уравнения этой системы в квадраты и сложим. Получим

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \psi^2 \sin^2\theta_0 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \psi^2 \sin^2\theta_0. \tag{26}$$

Определяя величину $\omega_x^2 + \omega_y^2$ из (23), убеждаемся, что она является постоянной, так как

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = (2h - J_z\omega_z^{(0)2}) / J_x = \mathrm{const}. \tag{27}$$

Учитывая (27), из (26) получаем

$$\psi^2 = (\omega_x^2 + \omega_y^2) / \sin^2\theta_0 = \mathrm{const},$$

т. е. угловая скорость прецессии $\psi = \mathrm{const} = \psi_0$ и, следовательно,

$$\psi = \psi_0 t + \psi_0, \tag{28}$$

где ψ_0, ψ_0 — значения угловой скорости прецессии и угла прецессии в начальный момент времени.

Из (22′) с учетом (25) и (28) получаем, что угловая скорость собственного вращения тоже постоянная величина, так как

$$\dot{\varphi} = \omega_z^{(0)} - \psi_0 \cos\theta_0 = \mathrm{const} = \dot{\varphi}_0 \tag{29}$$

и, следовательно,

$$\varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0, \tag{29$'$}$$

где $\dot{\varphi}_0$, ψ_0 — постоянные величины.

Движение гироскопа с постоянной скоростью собственного вращения $\dot{\varphi}$, постоянной скоростью прецессии ψ и постоянным углом нутации θ называется *регулярной прецессией*. *Уравновешенный гироскоп*, следовательно, *в общем случае совершает регулярную прецессию по инерции вокруг направления кинетического момента* $\bar{K}_O$.

Для того чтобы уравновешенный гироскоп совершал регулярную прецессию по инерции, т. е. без действия момента внешних сил относительно его неподвижной точки, необходимо выполнение условия

$$J_z\dot{\varphi} = (J_x - J_z)\psi \cos\theta. \tag{30}$$

Условие (30) получено в § 3 этой главы. Оно следует также из (29).

Если $\dot{\varphi}$, ψ и θ не удовлетворяют этому условию, то для поддержания регулярной прецессии требуется действие на гироскоп момента внешних сил.

Если уравновешенному гироскопу сообщить начальную угловую скорость ω_0 вокруг оси собственного вращения, то кинетический момент гироскопа $\bar{K}_O$, сохраняющий свое направление неизменным, будет все время направлен по этой оси. В этом случае угол нутации равен нулю и ось собственного

вращения совпадает с осью прецессии, по которой направлен кинетический момент, сохраняющий постоянное направление в неподвижном пространстве. Ось такого гироскопа тоже будет сохранять неизменным свое направление в этом пространстве. Это свойство уравновешенного гироскопа сохранять неизменным свое направление, например на какую-либо удаленную звезду, широко используется в различных гироскопических устройствах, таких, как гироскопические компасы, автопилоты и т. д.

Действие кратковременных возмущений, действующих на гироскоп, например вследствие движения объекта, на котором он установлен, с ускорением в течение короткого промежутка времени, рассматривается в приближенной теории гироскопа.